**Материалы для проведения**

**муниципального этапа**

**ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

**2024–2025 учебный год**

**Приморский край**

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап, 2024-2025 уч. год**

**7 класс**

7.1.Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получим второе число. Найдите эти числа.

7.2. На клетчатом листе нарисован прямоугольник . Разрежьте его по линиям сетки на пять каких-нибудь квадратов.

7.3. Каждый из четырёх волшебных гномов в шляпах – Руся, Шафег, Киря, Лёша, – либо лысый, либо волосатый, но только волосатые говорят правду, а лысые из-за злобы всегда врут. У них состоялся такой разговор:

Руся сказал Шафег: "Ты лысый".

А Киря Русе: "Нет, ты лысый".

Лёша возразил Кире: "Оба вы лысые. Да и ты тоже!".

Кто из них лысый, а кто с волосами?

7.4. Вода Тихого океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды надо прибавить к 40 кг такой воды, чтобы содержание соли в смеси составило 0,5%?

7.5. Какое наибольшее число клеток на доске 2024х2024 можно заштриховать так, чтобы никакие две закрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке). Обоснуйте почему больше нельзя.

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап, 2024-2025 уч. год**

**8 класс**

8.1. От Ленинграда до Москвы 660 км, от Ленинграда до деревни Лыково 310 км, от Лыково до Клина – 200км, и от Клина до Москвы – 150 км. Каково расстояние от Лыково до Москвы?

8.2. Кирилл записал в тетради пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нём все цифры на буквы, причём одинаковые цифры – на одинаковые буквы, а разные – на разные. В итоге у него получилось АБ\*ВГ=ДДЕЕ. Докажите, что он ошибся.

8.3. В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB = BC*) биссектриса *BD* в два раза короче биссектрисы *AE*. Найдите углы треугольника *ABC*.

8.4. Вода Тихого океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды надо прибавить к 40 кг такой воды, чтобы содержание соли в смеси составило 0,5%?

8.5. Двое по очереди ставят на шахматную доску коней – по одному коню за ход, причём коня можно ставить на любую незанятую клетку, которая не бьется ни одним из уже стоящих коней. Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто победит при правильной игре?

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап, 2024-2025 уч. год**

**9 класс**

9.1. Бригада должна выполнить работу по плану за несколько дней. Если бригада будет выпускать каждый день на 10 деталей больше, чем по плану, то она выполнит работу на 5 дней раньше. Если бригада будет выпускать ежедневно на 5 деталей меньше, то она закончит работу на 3 дня позже, чем планировалось. Сколько всего деталей должна была изготовить бригада и сколько деталей планировалось выпускать ежедневно?

9.2. Что больше

9.3. Длины оснований AB и CD трапеции ABCD равны 5 и 3 соответственно, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям. На отрезке CD как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках F и E соответственно. Известно, что длина отрезка BE в два раза больше длины отрезка DE. В каком отношении точка F делит отрезок AC?

9.4. Может ли число быть квадратом натурального числа?

9.5. В некотором городе любые двое жителей либо дружат, либо враждуют, причём все живут по правилам «друг моего друга – мой друг» и «враг моего врага – мой друг». Каждый день не более чем один житель может начать новую жизнь: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Докажите, что все жители могут подружиться.

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап, 2024-2025 уч. год**

**10 класс**

10.1. Из двух труб льются с постоянными скоростями в бассейн две жидкости. После того как бассейн был заполнен ровно наполовину, первая труба работала еще 3 часа, а вторая – ещё 12 часов. В результате бассейн был заполнен полностью, причем обеих жидкостей в нем оказалось поровну. За какое время заполнит бассейн первая труба?

10.2. У Вани есть большой набор из 100 разноцветных карандашей. Может ли Ваня нарисовать трёхцветные флаги так, чтобы каждый цвет присутствовал вместе с каждым другим цветом ровно один раз?

10.3. Может ли число быть квадратом натурального числа?

10.4. Числа , и образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа , и также образуют арифметическую прогрессию.

10.5. Окружности и касаются друг друга внешним образом в точке , отрезок – диаметр . Длины отрезков, отсекаемых окружностями на некоторой прямой, проходящей через точку , равны 2, 3 и 4 см, считая от точки . Найдите радиусы этих окружностей.

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**Муниципальный этап, 2024-2025 уч. год**

**11 класс**

11.1. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

11.2. По окружности расставлено 10 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух его соседей. Найдите все возможные наборы этих чисел.

11.3. Докажите, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трех квадратов.

11.4. Окружности и касаются друг друга внешним образом в точке , отрезок – диаметр . Длины отрезков, отсекаемых окружностями на некоторой прямой, проходящей через точку , равны 2, 3 и 4 см, считая от точки . Найдите радиусы этих окружностей.

11.5. Маша позвала 9 своих друзей на день рождения и разрезала круглый торт на 10 одинаковых кусков-секторов. Оказалось, что на каждом куске есть по одной вишенке. Ребята договорились сложить все вишенки на какой-нибудь один кусок и отдать его Маше, но при этом перекладывая каждый раз только одну любую вишенку на соседний кусок. Получится ли у них сделать это ровно за 50 ходов?

**Проверка и оценивание олимпиадных работ**

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице:

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы  | Правильность (ошибочность) решения |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Следует проинформировать жюри о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Время выполнения олимпиадных заданий – 3 часа 55 минут.

**Ответы, решения и критерии**

**7 класс**

**7.1.** Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получим второе число. Найдите эти числа.

**Ответ:** 431 и 43.

**Решение.**

Из условия задачи понятно, что данные два числа: двузначное и трехзначное. Запишем их таким образом:

где , – цифры данных чисел. Тогда

Из этого следует, что удовлетворяют только значения , .

**Критерии.**

Верный ответ без объяснения – 1 балл.

При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка – снять 2 балла.

**7.2.** На клетчатом листе нарисован прямоугольник . Разрежьте его по линиям сетки на пять каких-нибудь квадратов.

**Решение.**



**Критерии.**

Любое верное разрезание оценивается в 7 баллов.

**7.3.** Каждый из четырёх волшебных гномов в шляпах – Руся, Шафег, Киря и Лёша, – либо лысый, либо волосатый, но только волосатые говорят правду, а лысые из-за злобы всегда врут. У них состоялся такой разговор:

Руся сказал Шафег: "Ты лысый".

А Киря Русе: "Нет, ты лысый".

Лёша возразил Кире: "Оба вы лысые. Да и ты тоже!".

Кто из них лысый, а кто с волосами?

**Ответ:** Руся лысый, Шафег волосатый, Киря волосатый, Леша лысый.

**Решение.**

Предположим, что Руся волосатый и говорит правду. Тогда Шафег лысый. Киря лысый, так как говорит, что Руся лысый, а это по предположению не так. Из высказывания Лёши «Оба вы лысые. И ты тоже лысый» можем сказать, что Лёша тоже лысый, так как Руся волосатый по предположению. Следовательно, обратное высказывание Лёши звучит таким образом: «Хотя бы у одного из вас есть волосы. А ты волосатый», но так как Шафег и Киря лысые, мы приходим к противоречию с нашим изначальным предположением. Руся — лысый.

Руся лысый и согласно обратному его высказыванию, Шафег не лысый, а волосатый гном.

Киря говорит правду, когда утверждает, что Руся лысый. Киря — волосатый.

Так как Леша утверждает, что Шафег и Киря лысые, можем сказать, что Лёша лысый и говорит неправду. Тогда его обратное утверждение верно.

**Критерии.**

Только ответ без обоснования – 2 балла.

**7.4.** Вода Тихого океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды надо прибавить к 40 кг такой воды, чтобы содержание соли в смеси составило 0,5%?

**Ответ:** 240 кг.

**Решение.**

Составим таблицу исходя из условий задачи:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Общая масса воды | Масса соли | Процент соли к массе |
| Соленая вода |  |  | 3,5 |
| Пресная вода + соленая вода |  |  | 0,5 |

где – искомая масса пресной воды, – масса соли. Легко понять, что масса соли не меняется при добавлении пресной воды, поэтому

 (кг)

Решим уравнение:

**Критерии.**

Только ответ – 1 балл.

**7.5.** Какое наибольшее число клеток на доске 2024х2024 можно заштриховать так, чтобы никакие две закрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке). Обоснуйте почему больше нельзя.

**Ответ:** 1 024 144.

**Решение.**

Разобьём всю доску на квадратики 2х2 клеток, всего получим 2 024/2 \* 2 024/2 = 1 024 144 квадратиков 2х2. В каждом таком квадратике не может быть закрашено больше одной клетки, так как иначе они будут иметь общие точки. Следовательно максимальное количество возможных заштрихованных клеток на всей доске равно количеству таких квадратиков 2х2, то есть 1 024 144. Пример такой раскраски можно получить, закрасив левый верхний угол каждого квадратика.

**Критерии.**

Получена верная оценка – 5 баллов.

Построен верный пример – 2 балла.

**8 класс**

**8.1.** От Ленинграда до Москвы 660 км, от Ленинграда до деревни Лыково 310 км, от Лыково до Клина – 200 км, и от Клина до Москвы – 150 км. Каково расстояние от Лыково до Москвы?

**Ответ:** 350 км.

**Решение.**

Заметим, что сумма расстояний от Ленинграда до Лыково, от Лыково до Клина и от Клина до Москвы равна расстоянию от Ленинграда до Москвы. Следовательно, не выполняется неравенство треугольника и все города находятся на одной прямой. Тогда расстояние от Лыково до Москвы равно 660-310=350 км.

**Критерии.**

Верный ответ без обоснования – 1 балл.

**8.2.** Кирилл записал в тетради пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нём все цифры на буквы, причём одинаковые цифры – на одинаковые буквы, а разные – на разные. В итоге у него получилось АБВГ=ДДЕЕ. Докажите, что он ошибся.

**Решение.**

В числе ДДЕЕ сумма цифр на нечетных разрядах равна сумме цифр на нечетных (Д+Е = Д+Е), поэтому согласно признаку делимости на 11 число ДДЕЕ делится на 11.

Так как правая часть делится на 11, то и левая должна делится на 11, значит хотя бы один из множителей АБ, ВГ должен делится на 11. Двузначное число делится на 11 тогда и только тогда, когда оба числа на каждом разряде равны друг другу (11, 22,…, 99), но по условию задачи, А не равно Б, В не равно Г. Левая часть не делится на 11. Равенство невозможно и Кирилл ошибся.

**Критерии.**

Приведён контр-пример – 1 балл (количество примеров не имеет значения, суммарно ставится 1 балл).

Доказано, что число ДДЕЕ делится на 11 – 3 балла.

**8.3.** В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB = BC*) биссектриса *BD* в два раза короче биссектрисы *AE*. Найдите углы треугольника *ABC*.

**Ответ:** 36, 36 и 108 градусов.

**Решение.**

Пусть угол .

Достроим треугольник до ромба . Через обозначим точку пересечения диагоналей и ромба . Тогда . По условию , следовательно, .

Рассмотрим трапецию . Так как диагонали этой трапеции равны, то трапеция равнобедренная и , а также угол . Угол (углы при диагоналях).

В прямоугольном треугольнике угол . По теореме о сумме углов треугольника , поэтому . Тогда углы треугольника равны , и .

**8.4.** Вода Тихого океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды надо прибавить к 40 кг такой воды, чтобы содержание соли в смеси составило 0,5%?

**Ответ:** 240 кг.

**Решение.**

Составим таблицу исходя из условий задачи:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Общая масса воды | Масса соли | Процент соли к массе |
| Соленая вода |  |  | 3,5 |
| Пресная вода + соленая вода |  |  | 0,5 |

где – искомая масса пресной воды, – масса соли. Легко понять, что масса соли не меняется при добавлении пресной воды, поэтому

 (кг)

Решим уравнение:

**Критерии.**

Только ответ – 1 балл.

**8.5.** Двое по очереди ставят на шахматную доску коней – по одному коню за ход, причём коня можно ставить на любую незанятую клетку, которая не бьется ни одним из уже стоящих коней. Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто победит при правильной игре?

**Ответ:** второй игрок.

**Решение.**

Для построения стратегии отметим точку, которая является центром шахматной доски. Пусть 1ый игрок ставит коня на любую клетку на доске. 2ой игрок после хода 1го игрока будет ставить коня на клетку симметричную относительно отмеченного ранее центра. Таким образом каждый раз 2ой игрок после хода 1го ставит коня на симметричную клетку: такая клетка всегда будет свободной. Покажем это.

Каждой клетке поставим в соответствие пару чисел (x,y). Пусть 1ый игрок ставит коня на клетку (x1,y1), x1+y1 – четно(нечетно) тогда его ход делает недоступными клетки с обратной четностью. Рассмотрим ход второго игрока (x2,y**2**), заметим, что сумма координат любой клетки симметричной (x1y1) сохраняет четность. Из этого следует, что ход игрока 1 не может заблокировать ход игроку 2. Игрок 2 всегда может поставить коня симметрично поставив его относительно центра доски.

Так как количество заблокированных для постановки коня после хода обоих игроков четно, то последний ход сделает 2ой игрок, а первый всегда проигрывает при такой стратегии.

**Критерии.**

Приведён пример стратегии, работающей в частных случаях – 1 балл.

Приведена верная стратегия, но без обоснования – 3 балла.

**9 класс**

**9.1.** Бригада должна выполнить работу по плану за несколько дней. Если бригада будет выпускать каждый день на 10 деталей больше, чем по плану, то она выполнит работу на 5 дней раньше. Если бригада будет выпускать ежедневно на 5 деталей меньше, то она закончит работу на 3 дня позже, чем планировалось. Сколько всего деталей должна была изготовить бригада и сколько деталей планировалось выпускать ежедневно?

**Ответ:** 3600 дет., 80 дет. в день

**Решение.**

Пусть – общее количество деталей в заказе, а – скорость бригады (кол-во деталей в день). Составим систему уравнений:

Из условия ясно, что Решим систему

**Критерии.**

Верно найдено только одно из требуемых значений – 5 баллов.

Верно составлена математическая модель – 3 балла.

Только ответ – 1 балл.

**9.2.** Что больше

**Ответ:** первое число.

**Решение.**

Значит,

**9.3.** Длины оснований AB и CD трапеции ABCD равны 5 и 3 соответственно, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям. На отрезке CD как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках F и E соответственно. Известно, что длина отрезка BE в два раза больше длины отрезка DE. В каком отношении точка F делит отрезок AC?

**Ответ:** 9/20.

**Решение.**

Пусть тогда Треугольники и подобны по двум углам. Тогда

Откуда, Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора найдем :

Далее найдем Тогда

Рассмотрим треугольник в нем Пусть

Тогда

Откуда ,

**Критерии.**

Только ответ – 1 балл.

Остальные баллы суммируются:

Верно найдено DE – 2 балла.

Верно найдено CE – 1 балл.

Верно найдено AD – 2 балла.

Верно найдено CF/AF – 2 балла.

**9.4.** Может ли число быть квадратом натурального числа?

**Ответ:** нет.

**Решение.**

Заметим, что число 60 делится на 12. Поэтому достаточно понять, может ли квадрат натурального числа быть сравним с 6 по модулю 12. Простой перебор показывает, что остаток 6 при делении на 12 квадрата натурального числа получить нельзя.

**Критерии.**

Только ответ – 0 баллов.

**9.5.** В некотором городе любые двое жителей либо дружат, либо враждуют, причём все живут по правилам «друг моего друга – мой друг» и «враг моего врага – мой друг». Каждый день не более чем один житель может начать новую жизнь: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Докажите, что все жители могут подружиться.

**Решение.**

Выберем какого-нибудь жителя A. Разобьём всех жителей на два непересекающихся множества: друзья A и враги A. Согласно принципу «друг моего друга – мой друг» любые два друга A тоже дружат, поэтому все жители первого множества дружат друг с другом. Пусть B – враг A. Согласно принципу «друг моего друга – мой друг» B также враждует со всеми друзьями A (в противном случае B дружил бы и с A). Кроме того, согласно принципу «враг моего врага – мой друг» B дружит со всеми врагами A, т.е. с жителями из второго множества.

Таким образом, мы разбили жителей города на два множества, причём любые два жителя из одного множества дружат друг с другом, а любые два жителя из разных множеств враждуют. Когда какой-то житель начинает новую жизнь, он переходит из одного множества в другое. Таким образом, если все жители одного множества по очереди начнут новую жизнь, то со временем это множество станет пустым, а другое будет состоять из всех жителей города, которые дружат друг с другом.

**Критерии.**

Рассмотрена идея о разбиении множества жителей города на два непересекающихся множества, но дальнейшее продвижение отсутствует или несущественно – 3 балла.

**10 класс**

**10.1.** Из двух труб льются с постоянными скоростями в бассейн две жидкости. После того как бассейн был заполнен ровно наполовину, первая труба работала еще 3 часа, а вторая – ещё 12 часов. В результате бассейн был заполнен полностью, причем обеих жидкостей в нем оказалось поровну. За какое время заполнит бассейн первая труба?

**Ответ:** 18 ч.

**Решение.**

Пусть – объем всего бассейна в л.,  л/ч – скорость 1 трубы, л/ч – скорость 2 трубы, ч – время, за которое обе трубы заполнят половину бассейна. Получим систему

С другой стороны,

Тогда

Откуда,

**Критерии.**

Верно составлена математическая модель – 3 балла.

Только ответ – 1 балл.

**10.2.** У Вани есть большой набор из 100 разноцветных карандашей. Может ли Ваня нарисовать трёхцветные флаги так, чтобы каждый цвет присутствовал вместе с каждым другим цветом ровно один раз?

**Ответ:** нет, не может.

**Решение.**

Предположим, что у Вани есть фиолетовый цвет. Если бы Ваня мог нарисовать трёхцветные флаги согласно условию, то он использовал ещё чётное число цветов – по два новых цвета на каждый флаг. Число 99 нечётно.

**Критерии.**

Решение сведено к тому, что число цветов должно быть нечётным – 5-7 баллов.

**10.3.** Может ли число быть квадратом натурального числа?

**Ответ:** нет.

**Решение.**

Заметим, что число 60 делится на 12. Поэтому достаточно понять, может ли квадрат натурального числа быть сравним с 6 по модулю 12. Простой перебор показывает, что остаток 6 при делении на 12 квадрата натурального числа получить нельзя.

**Критерии.**

Только ответ – 0 баллов.

**10.4.** Числа , и образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа , и также образуют арифметическую прогрессию.

**Решение.**

Так как три числа образуют арифметическую прогрессию, то среднее из них является средним арифметическим двух других. Не нарушая общности, можно считать, что

Домножим на удвоенное произведение знаменателей данных дробей:

Таким образом, является средним арифметическим чисел и , поэтому они образуют арифметическую прогрессию .

**Критерии.**

За каждую вычислительную ошибку снять 2 балла.

Различные свойства арифметической прогрессии принимаются без доказательства. Заданием не требуется указывать конкретную арифметическую прогрессию.

**10.5.** Окружности и касаются друг друга внешним образом в точке , отрезок – диаметр . Длины отрезков, отсекаемых окружностями на некоторой прямой, проходящей через точку , равны 2, 3 и 4 см, считая от точки . Найдите радиусы этих окружностей.

**Ответ:**

**Решение.**

Пусть ВЕ — данная секущая, и — проекции на нее точек и соответственно. Из условия задачи следует, что = 1 см, = 7 см, = 2 см. Положим тогда . Из прямоугольных треугольников и имеем:

Т.е.

Из подобия треугольников вытекает, что т.е. Тогда

**Критерии.**

Только ответ – 1 балл.

**11 класс**

**11.1.** Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

**Ответ:** 2.

**Решение.**

Обозначим скорости пешехода, мотоциклиста и велосипедиста . Пусть пешеход стоит на месте, а мотоциклист движется со скоростью велосипедист со скоростью Тогда к моменту встречи мотоциклиста и велосипедиста мотоциклист проедет 9 км, а велосипедист – 3 км. Значит, скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста. Поэтому, пока мотоциклист будет ехать 6 км до пешехода, велосипедист отъедет от пешехода на км.

**Критерии.**

Только ответ – 0 баллов.

**11.2.** По окружности расставлено 10 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух его соседей. Найдите все возможные наборы этих чисел.

**Ответ:** только нули.

**Решение.**

Согласно условию задачи, все числа неотрицательны. Пусть – наибольшее из них. Его соседи – и , причём . Тогда , т.е. . Так как наибольшее из всех, а неотрицательно, то , . Таким образом, мы нашли тройку рядом стоящих чисел:

Если теперь рассмотреть левое из этих трёх чисел, то в силу условия задачи получим последовательность

Аналогично продолжая рассуждения, заметим, что вся последовательность представляет собой повторение одной и той же тройки чисел: . Так как всего чисел 10 (не делится на 3), то . Таким образом, вся последовательность состоит из нулей.

**Критерии.**

Если решение состоит только из примера без доказательства, что он единственный – 2 балла.

Следующие продвижения оцениваются отдельно, баллы суммируются:

- доказано, что каждое число не больше его соседей – 2 балла,

- доказано, что последовательность состоит из повторяющейся тройки чисел – 2 балла.

**11.3.** Докажите, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трех квадратов.

**Решение.**

Покажем, что с помощью многочлена нельзя представить бесконечно много чисел. Для этого рассмотрим какие остатки может давать нам любой квадрат целого числа при делении на 8. Для этого достаточно рассмотреть числа от 0 до 8.

Мы видим, что с помощью многочлена можно получить числа с остатком от деления на 8 равным 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. В таком случае данный многочлен не может дать ни одного целого числа, при делении на 8 которого будет получен остаток 7. Таких чисел бесконечное множество, что и требовалось доказать.

Критерии.

Рассмотрена идея сравнимости по модулю 8 – не меньше 5 баллов.

**11.4.** Окружности и касаются друг друга внешним образом в точке , отрезок – диаметр . Длины отрезков, отсекаемых окружностями на некоторой прямой, проходящей через точку , равны 2, 3 и 4 см, считая от точки . Найдите радиусы этих окружностей.

**Ответ:**

**Решение.**

Пусть ВЕ — данная секущая, и — проекции на нее точек и соответственно. Из условия задачи следует, что = 1 см, = 7 см, = 2 см. Положим тогда . Из прямоугольных треугольников и имеем:

Т.е.

Из подобия треугольников вытекает, что т.е. Тогда

**Критерии.**

Только ответ – 1 балл.

**11.5.** Маша позвала 9 своих друзей на день рождения и разрезала круглый торт на 10 одинаковых кусков-секторов. Оказалось, что на каждом куске есть по одной вишенке. Ребята договорились сложить все вишенки на какой-нибудь один кусок и отдать его Маше, но при этом перекладывая каждый раз только одну любую вишенку на соседний кусок. Получится ли у них сделать это ровно за 50 ходов?

**Ответ:** нет, не получится.

**Решение.**

«Раскрасим» куски торта в чёрный и белый цвет чередуя цвета. Тогда два соседних куска имеют разные цвета. Перекладывание вишенки на соседний кусок означает, что она меняет цвет куска, на котором лежит. Изначально на торте 5 «белых» и 5 «чёрных» вишенок. Каждый ход число «белых» и «чёрных» вишенок будет меняться на 1, а именно, при увеличении одного из этих чисел на 1 другое будет уменьшаться на 1. Тогда каждый нечётный ход (первый, третий, пятый и т.д.) оставит на торте чётное число «белых» и чётное число «чёрных» вишенок, а каждый чётный ход (второй, четвёртый и т.д.) – нечётное число. Следовательно, на 50 ход на торте будет нечётное число «белых» и нечётное число «чёрных» вишенок. Так как вишенок каждого цвета будет как минимум одна, они все не могут находиться на одном кусе.

**Критерии.**

Рассмотрена идея раскраски, но дальнейшее продвижение отсутствует – 2 балла.

Рассмотрение более простых случаев (например, сведение задачи к случаю с 4 кусками (вместо 10) или 10 ходами (вместо 50)) оценивается только при условии, что обобщение работает, не более 3 баллами.